2023/2024 British Mathematical Olympiad ronda 2, P2 de 4

Doubt Yourself

André Pinheiro

Fevereiro de 2024

Problema 1

Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que

$$2f(f(n)) = 5f(n) - 2n, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Solução

Substituindo $f(n) = an + b$, podemos ver que $f(n) = 2n$ é solução para a equação e isso é fácil de verificar. Seria bom provar que esta é a única solução.

Solução

Substituindo $f(n) = an + b$, podemos ver que $f(n) = 2n$ é solução para a equação e isso é fácil de verificar. Seria bom provar que esta é a única solução.

Fazendo a seguinte substituição $g(n) = f(n) - 2n \Leftrightarrow f(x) = g(n) + 2n$, temos

Solução

Substituindo $f(n) = an + b$, podemos ver que $f(n) = 2n$ é solução para a equação e isso é fácil de verificar. Seria bom provar que esta é a única solução.

Fazendo a seguinte substituição $g(n) = f(n) - 2n \Leftrightarrow f(x) = g(n) + 2n$, temos

$$2f(f(n)) = 5f(n) - 2n \Rightarrow 2(g(f(n)) + 2f(n)) = 4f(n) + g(n)$$

$$\Rightarrow 2g(f(n)) + 4f(n) = 4f(n) + g(n) \Rightarrow 2g(f(n)) = g(n)$$

Temos uma equação mais simples e o nosso objetivo é provar que $g(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$

Solução

Vamos tentar transformar o segundo membro no primeiro membro.
Repare que a partir dessa equação, temos que

Solução

Vamos tentar transformar o segundo membro no primeiro membro. Repare que a partir dessa equação, temos que

$$2g(f(n)) = g(n) \Rightarrow 4g(f(n)) = 2g(n)$$

Solução

Vamos tentar transformar o segundo membro no primeiro membro. Repare que a partir dessa equação, temos que

$$2g(f(n)) = g(n) \Rightarrow 4g(f(n)) = 2g(n)$$

Seja $n = f(z), \forall z \in \mathbb{Z}$, vamos ter que

Solução

Vamos tentar transformar o segundo membro no primeiro membro. Repare que a partir dessa equação, temos que

$$2g(f(n)) = g(n) \Rightarrow 4g(f(n)) = 2g(n)$$

Seja $n = f(z), \forall z \in \mathbb{Z}$, vamos ter que

$$4g(f(n)) = 2g(n) \Rightarrow 4g(f(f(z))) = 2g(f(z)) = g(z), \forall z \in \mathbb{Z}$$

Solução

Vamos tentar transformar o segundo membro no primeiro membro. Repare que a partir dessa equação, temos que

$$2g(f(n)) = g(n) \Rightarrow 4g(f(n)) = 2g(n)$$

Seja $n = f(z), \forall z \in \mathbb{Z}$, vamos ter que

$$4g(f(n)) = 2g(n) \Rightarrow 4g(f(f(z))) = 2g(f(z)) = g(z), \forall z \in \mathbb{Z}$$

Repetindo o mesmo raciocínio, vamos ter que

Solução

Vamos tentar transformar o segundo membro no primeiro membro. Repare que a partir dessa equação, temos que

$$2g(f(n)) = g(n) \Rightarrow 4g(f(n)) = 2g(n)$$

Seja $n = f(z), \forall z \in \mathbb{Z}$, vamos ter que

$$4g(f(n)) = 2g(n) \Rightarrow 4g(f(f(z))) = 2g(f(z)) = g(z), \forall z \in \mathbb{Z}$$

Repetindo o mesmo raciocínio, vamos ter que

$$2^k g(...) = g(n) \Rightarrow 2^k \mid g(n), \forall n, k \in \mathbb{Z}$$

Solução

Vamos tentar transformar o segundo membro no primeiro membro. Repare que a partir dessa equação, temos que

$$2g(f(n)) = g(n) \Rightarrow 4g(f(n)) = 2g(n)$$

Seja $n = f(z), \forall z \in \mathbb{Z}$, vamos ter que

$$4g(f(n)) = 2g(n) \Rightarrow 4g(f(f(z))) = 2g(f(z)) = g(z), \forall z \in \mathbb{Z}$$

Repetindo o mesmo raciocínio, vamos ter que

$$2^k g(...) = g(n) \Rightarrow 2^k \mid g(n), \forall n, k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja, se $g(n) \neq 0$ para um dado n, então basta considerar um dado k tal que $2^k > |g(n)|$, o que é absurdo.

Solução

Vamos tentar transformar o segundo membro no primeiro membro.
Repare que a partir dessa equação, temos que

$$2g(f(n)) = g(n) \Rightarrow 4g(f(n)) = 2g(n)$$

Seja $n = f(z), \forall z \in \mathbb{Z}$, vamos ter que

$$4g(f(n)) = 2g(n) \Rightarrow 4g(f(f(z))) = 2g(f(z)) = g(z), \forall z \in \mathbb{Z}$$

Repetindo o mesmo raciocínio, vamos ter que

$$2^k g(...) = g(n) \Rightarrow 2^k \mid g(n), \forall n, k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja, se $g(n) \neq 0$ para um dado n, então basta considerar um dado k tal que $2^k > |g(n)|$, o que é absurdo.

Logo, $g(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ e, portanto $f(n) = 2n$ é a única solução.